ＤＥＲＩＶＥによる数式処理入門

９６，７，２０

東京パックス有限会社
南中野パソコン教室

はじめに

「数式処理」とは耳慣れない言葉かも知れません。

コンピュータ（パソコンも含めて）は、数値を扱うのは得意ですが、代数のようなものは、苦手であるというのが以前は常識であったからです。

現在では、代数式（ここでは、数値だけでない文字変数を含んだ式という意味で使用しています。）を器用に扱うソフトウェアが多く現れています。

著名なものでは、MATHMATICAやMATHCAD、MAPLEなどがあります。

ここでは、比較的価格が安くメニュー方式で操作が簡単な「ＤＥＲＩＶＥ」を使用して数式処理の扱いになれてみましょう。ＤＥＲＩＶＥは、アメリカのソフトであるためメニューが英語で表示されます。この点は、メニューの概要で説明するとともに個々の項目でも説明します。この点にさえなれてしまえば、ＤＥＲＩＶＥには、数値計算の他に代数計算、微分、積分、ベクトルと行列計算等、高校から大学において学習する多くの問題を解く能力があります。

なお、本テキストでは、紙数の関係とＤＥＲＩＶＥでは、微分方程式の扱いが面倒なため微分方程式については、一切触れませんでした。ご了承下さい。

それでは、早速、取りかかりましょう。

目　次

Ⅰ　起動及びメニューの説明

ＤＥＲＩＶＥは、ＭＳ－ＤＯＳ上で動くソフトウェアです。しかし、ＷＩＮＤＯＷＳ３．１又は９５のＤＯＳウィンドウ上で動かすことができます。

しかし、当教室では、純粋のＭＳ－ＤＯＳ環境で起動することにします。その方が速度も若干速くなりまし、画面コピーがとれます。

１．起動

パソコンの電源をＯＮにしてください。起動ドライブの選択メニューが出ますが、一番目のドライブを選択してリターンを押して下さい。

ＳＯＳのメニュー画面になります。ROLLDOWN又はROLLUPキーによりＤＥＲＩＶＥの名前を見つけて下さい。上下の矢印キーでＤＥＲＩＶＥを選択してリターンを押します。

ＤＥＲＩＶＥの初期画面は、次のとおりです。冒頭に書かれているのは、バージョン情報と著作権に関することがらです。

画面下部に主メニューが表示されています。

また、Free 100%というのは、数式を処理するメモリー部分が空いている割合を表示しています。

```
                         D E R I V E
                 A Mathematical Assistant

                        Version 2.54


           Copyright (C) 1988 through 1992 by
                  Soft Warehouse, Inc.
              3660 Waialae Avenue, Suite 304
            Honolulu, Hawaii, 96816-3236, USA

If you have received this product as "shareware" or "freeware", you have an
unauthorized copy, because it is a violation of our copyright to distribute
DERIVE on a free trial basis.

To obtain a licensed copy, or if you know of any person or company distributing
DERIVE as shareware or freeware, please contact us at the above address or fax
(808) 735-1105.

                       Press H for help
--------------------------------------------------------------------------------
CALCULUS: Differentiate Integrate Limit Product Sum Taylor

Enter option
                                  Free:100%              Derive Algebra
```

２．メニューの概要

メニューは、次の構造を持っています。メニューを選択するには、スペースバーを押して強調部分を移動するか、または、メニューの大文字で表示されている文字を押します。

（ＤＥＲＩＶＥのマニュアルから引用）

今後、標記を簡単化するため、Windowメニューを押してCloseメニューを押してと書く代わりにＷ－Ｃと略記することにします。従って、終了は、Ｑというわけです。

数式ウィンドウコマンド

Author	アーサー行に新しい数式を入力する
Build	演算子と関数を用いて数式を組み合わせる
Caculus	
Diffcrentiate	数式の微分をする
Integrate	数式の積分をする
Limit	数式の極限を求める
Product	数式の積を求める
Sum	数式の和を求める
Taylor	数式の多項式近似を行う
Declare	
Function	関数の宣言とそのオプション指定をする
Variable	
Domain	変数とその領域の指定をする
Value	変数の宣言とそのオプション指定
Matrix	行列を入力する
VectoR	ベクトルを入力する
Ｅxpand	一部または全ての変数に関して展開する
Factor	一部または全ての変数に関して因数分解する
Help	オンラインヘルプ
Editing	行の編集コマンド
Functions	システム定義関数と定数
Algebra	数式ウインドウ　コマンド
2D－plot	２Ｄプロットウインドウ　コマンド
3D一plot	３Ｄプロットウインドウ　コマンド
Utility	ユーティリティファイルにおける関数
State	環境設定の現在の状態
Return	Derive に戻る
Jump	ユーザー選択の数式に強調部分を移動させる
soLve	関係式または、方程式の線形システムを解く
Manage	
Branch	Principal real 他のブランチを単純化のために選択する
Expomential	指数の整理と展開
Logarithm	対数関数の整理と展開
Ordering	変数に対する順序を整理する
Substitute	変数や補助数式に対して値を代入する
Trigonometry	三角関数の整理と展開

Options
    Color
    Menu　　　　　　メニュー、メッセージ、環境表示行の色の指定
    Work　　　　　　ワークエリアの前景と背景色の指定
    Display　　　　グラフィックまたはテキストの表示モード
    Execute　　　　ＤＯＳ コマンドの実行
    1nput　　　　　multi-character名とcase-sensitiveインプットモード
    Mute　　　　　　エラー音のオン・オフ
    Notation　　　ディスプレイ表示の数字表記法
    Precision　　　数学演算上の精度
    Radix　　　　　入力と出力の記数法の底
Plot　　　　　　　2Dまたは8Dプロットの切り替え
Quit　　　　　　　Derive を終了して DOS に戻す
Remove　　　　　一つ以上の数式のブロックを消去する
Simplify　　　　数式を簡単化する
Transfer
    Load
        Derive　　Derive MTH ファイルから数式を読み込みディスプレイに表示する
        State　　　Deriveイニシアライズファイルからコントロールセットを読み込む
        Utility　　MTH ファイルからディスプレイに表示しないで定義を読み込む
    Save
        Derive　　Derive ファイルに数式を保存する
        Basic　　　BASIC 形式ファイルに数式を保存する
        Fortran　　FORTRAN 形式ファイルに数式を保存する
        PascaI　　PASCAL形式ファイルに数式を保存する
        Options　　保存する数式の範囲とファイルの長さを選択する
        State　　　イニシァライズファイルに現在の環境設定を保存する
    Merge　　　　　Derive ファイルから表示をマージする
    Clear　　　　　Algebra Window(数式ウインドウ)の表示を消す
    Demo　　　　　　Derive のデモファイルのデモを実行する
Print
    Printer　　　プリンターに数式を印刷する
    File　　　　　ファイルに数式を書き込む
    Layout　　　　ベージサイズとマージンをセットする
moVe　　　　　　　一つ以上の数式を移動する
Window
    CIose　　　　　ウインドウを閉じる
    Designate　　アクティブウインドウを明示する
    Flip　　　　　オーバーレイウインドウを(F2関数キー同様に)めくる
    Goto　　　　　与えられた番号のウインドウにとばす
    Next　　　　　次のウインドウに移す(FI関数キー同様に)
    Open　　　　　新しいウインドウをオーブンする
    Previous　　前のウインドウに移す
    Split
        Horizontal アクティブウインドウを水平に分割する
        Vertical　アクチィブウインドウを垂直に分割する
approX　　　　　　数値の近似値を求める

２Ｄプロットウィンドウ

Algebra	数式ウインドウに切り替える
Center	クロスの近くにプロットウインドウの中心を移す
Delete	
AII	プロットリスト上のグラフを全て削除する
Butlast	プロットリスト上のグラフを最後の一つを除いて削除する
First	プロットリスト上の最初のグラフを削除する
Last	プロットリスト上の最後のグラフを削除する
Help	(数式ウインドウの Help コマンドと同様)
Move	指定の座標にクロスを移動する
Options	
Accuracy	プロット精度の指定
Color	
Auto	プロット色を自動的に指定する
Plot	プロットと軸の色の指定
Menu	メニュー、メッセージ、環境表示行上の色を指定
Work	プロット範囲の背景色の指定
Display	グラフィックまたはテキストのディスプレイモードの指定
Execute	Ｄ Ｏ Ｓ コマンドを実行する
Mute	ビーブ音のオン・オフ
Notation	ディスプレイ表示の記数の方法
Precision	算術計算の精度
Radix	入力と出力の記数法の底
State	直交座標、極座標、連続または破線、大小のプロット点の区別
Plot	数式ウインドウの強調表示のプロット
Quit	Deriveを終了し DOS に戻す
Scale	プロットスケールの指定(見える範囲)
Ticks	2Dプロットウインドウの縦横比の指定
Window	(数式ウインドウのwindowコマンドと同様)
Zoom	プロットスケールの拡大・縮小のズーム調整

３Ｄプロットウィンドウ

Algebra	数式ウインドウに切り替える
Center	ボックスの中心の座標の指定
Eye	視点の座標の指定
Focal	焦点の座標の指定
Grids	グリッドパネルの数の指定
Hide	陰線の表示のコントロール
Length	トランスペァレントボックスの両側の数の指定
Options	軸のディスプレイのオン.オフ指定
Axes	
Color	
Plot	上、下枠および両軸の色の指定
Menu	メニュー、メッセージおよび環境表示行の指定
Work	プロット領域の背景色の指定
Display	グラフィックまたはテキストモードの指定
Execute	ＤＯＳ コマンドの実行
Mute	エラー音のオン・オフ
Notation	ディスプレイ表示の記数の方法
Precision	算術計算の精度
Radix	入力と出力の記数法の底
Plot	数式ウインドウの強調された数式のプロット
Quit	Deriveを終了して DOS に戻す
Window	(数式ウインドウコマンドのwindowと同様)
Zoom	ボックスの両サイドの長さのズームを調整する

Ⅱ　数値計算

数式処理に入る前に普通の数値計算を行ってみましょう。

１．加減乗除

（１）数値の入力と簡単化

Ａと押し１＋２と入力しリターンを押して下さい。

１：１＋２と表示されます。

ここで、簡単化するためにＳと押すと簡単化する数式の番号が＃１というように表示されます。これは、修正して例えば、＃２というようにできますが、今は、このままリターンを押します。すると、２：３と結果が表示されます。このように一行毎に番号がつきます。

次に引き算ですが、５－６というように普通に入力します。

また、かけ算記号は、＊、わり算記号は、／です。

（２）有効桁数の設定

次に小数点を含む数値を入力してみましょう。

０．１２３４５６７８９と入力します。

３：０．１２３４５６としか表示されません。これは、有効数字が６桁となっているためです。これを変更してみましょう。Ｏ－ＰでＴＡＢで６を１２に変更してみます。

前の式を消去するためには、Ｒで消去すると式の番号が＃３と表示されますのでリターンを押します。

再度、０．１２３４５６７８９と入力してみます。今度は、正しく表示されるはずです。

（３）符号を含んだ数値の入力

プラスの数値は、そのまま。マイナスの場合は、「－」を付けて入力します。

（４）特別な定数

π（円周率）やｅ（自然対数の底）は、特別な定数です。

ＡでＰＩと入力して下さい。有効数字を大きくして確認してみてください。

また、ｅは、ｅではなく＃ｅと入力して下さい。ｅと入力すると文字変数と解釈されます

（５）べき乗を含んだ数値

2^{10}のようなべき乗を含んだ数値は、２＾１０のように入力します。

（６）かっこの使用

普通のかっこの使用については、（　）のみが使用できます。
［　］は、別の意味で使用されますので後述します。

（７）素因数分解

任意の数を入力します。例えば、１１，７１１としてＦを押します。するとこの数を素数の積に素因数分解をします。

次に１７１，１４５を分解してみましょう。

２．分数

わり算のところでも説明しましたが、分数は、１／２のように入力します。

それでは、１／２＋１／３と入力をします。

簡単化してみます。Ｓでリターンを押すと、５／６と表示されます。

では、$1/2^{10}$と入力して下さい。これは、１／２＾１０でＯＫです。

＊、／等の記号（演算子）の優先順位は、上から＾、＊及び／、＋及び－の順に強くなっています。

３．根号を含んだ式

根号を含んだ数値は、次のように入力します。

ＳＱＲＴ（３＋ＳＱＲＴ（２））というようにＳＱＲＴ（　）が√に代わるものです。

それでは、Ｓで簡単化してみましょう。Ｓでは、これ以上簡単化できません。
そこで数値として求めてみましょう。Ｘを押して数式番号を確認の上リターンを押します。
Ｏ－Ｐで指定した桁数の有効数字で値が示されます。

４．計算モード

approximate, mixed, exactを選択できます。通常は、exactモードとなっており、厳密に式を評価します。approximateは、数値的に式を評価します。mixedモードは、数値的に計算できる部分は、数値的に、できない部分はexactモードで計算を行います。

$(1+\mathrm{sqrt}(2))^2$を入力して、３つのモードで比較してみましょう。

練習問題Ⅱ

（１）下記を入力して簡単化しましょう。

①　１＋２＋３＋４＋５＋６＋７＋８＋９＋１０

②　１＋2^{2}＋2^{3}＋2^{4}＋2^{5}＋2^{6}＋2^{7}＋2^{8}＋2^{9}＋2^{10}

③　１＋１／２＋１／３＋１／４＋１／５＋１／６＋１／７＋１／８＋１／９＋１／１０

④　①＋②（ヒント：＃数式番号＋＃数式番号でできます。）

⑤　sqrt(sqrt(3)+1)+sqrt(3sqrt(3)+3)／sqrt(24sqrt(3)+40)　（答え＝１／２）

（２）下記の数値を計算しましょう。有効数字は、１２桁とします。

①　π^{e}の数値を計算しましょう。

②　１／ＳＱＲＴ（ＳＱＲＴ（２））

③　$(\pi+e)^{2}/(e^{\pi}-1)^{3}$

④　$e^{\pi * SQRT(163)}$

なお、④の数値は、整数であるという噂がありますが、正しいでしょうか？
有効数字を上げて確認してみましょう。

Ⅲ　代数計算

さて、これから数式処理に入っていきます。

１．代数式の入力

代数式の入力は、数値の入力と同様です。

Ａ＋Ｂ，Ｃ－Ｄ，Ａ＊Ｂ，Ｃ／Ｅ，A^Rというように入力すればよいのです。

それでは、$（1＋X）^{10}$ と入力してみましょう。

文字は、大文字、小文字のどちらでもかまいません。これは、Ｏ－ＩのWORD及びCASE-INSENSITIVEの選択で決まります。文字変数等は、WORDを選択している場合は、ＡＢＣは、ＡＢＣという１つの変数名と解釈されます。

また、よく使用するギリシャ文字は、例えば、α等は、アルファベットでＡＬＰＨＡ等と入力します。下記によく使用するギリシャ文字と対応するアルファベットを挙げます。

α	ａｌｐｈａ、	β	ｂｅｔａ、	γ	ｇａｍｍａ、	δ	ｄｅｌｔａ
ε	ｅｐｓｉｌｏｎ、	ζ	ｚｅｔａ、	η	ｅｔａ、	θ	ｔｈｅｔａ
λ	ｌａｍｂｄａ、	μ	ｍｕ、	ν	ｎｕ、	ρ	ｒｈｏ
σ	ｓｉｇｍａ、	τ	ｔａｕ、	φ	ｐｈｉ、	ω	ｏｍｅｇａ

なお、画面では、ギリシャ文字で表示されます。

これを使用してｓｉｎ（θ）と入力してみましょう。

２．展開

$（1＋x）^5$と入力しＥで展開してみましょう。

次に$（1＋a＋b）^5$と入力し展開してみましょう。このように変数が２つ以上の場合は、どの変数について展開するかを指定することができます。ただ、リターンを押した場合は、すべての変数について展開をします。

また、指定した場合、例えば、ａについて指定した場合は、ａのべき乗で展開されｂについては、展開されません。

両方を確認してみましょう。このような場合、２回同じ式を入力する必要はありません。

Ｅと押した際に示される数式番号を直接、修正するか（最後の式を示しています）、または、矢印キーで目的の式$（1＋a＋b）^5$を直接、指してＥを押すかのどちらかでかまいません。

３．簡単化

Ｓ（簡単化）は、最も煩雑に用いられる手段でしょう。

例えば、$（1－x^{10}）／（（1＋x）（1－x））$を簡単化してみましょう。

４．因数分解

前述の$1-x^{10}$を因数分解してみましょう。Ｆを押します。

サブメニューとして、trivial、squarefree、rational、radical、complexの５つがあります。

radicalは、無理数の範囲で、complexは、複素数の範囲で、rationalは、有理数の範囲でそれぞれ因数分解します。また、trivialは、分母、分子を通分します。

更に、squarefreeは、平方因子（$(\ )^2$ の形式）をくくりだします。

上記の因数分解においてそれぞれ指定して比べてみましょう。

次に$1-x^n$を大きいｎで因数分解を行いＤＥＲＩＶＥの限界を試してみましょう。

また、ｎが素数の時には、特徴的なことがありますのでそれも調べてみましょう。

５．代入

代入は、変数の置き換え及び数値を変数に代入するなど使う機会の多い操作です。

Ｍ－Ｓで置き換える変数が出てきた時点で置き換える値又は式を入力します。
置き換えない変数については、リターンを押すだけです。

さて、ＳＩＮ（ＳＱＲＴ（Ｘ））／ＳＱＲＴ（Ｘ）を入力しＸの値としてπ、２π、３π、４πをそれぞれ代入して値を調べましょう。

次にＸを$1/t^2$とおいて代入し簡単化しましょう。

すでに画面に表示されている数式の一部を代入する際に便利な方法があります。

数式の一部を強調してｆ３キーを押すとＡのカーソル位置に挿入されます。
また、ｆ４キーを押した場合は、かっこでくくります。

６．変数の定義

（１）変数の属性

変数について属性又は範囲を定義することができます。

属性については、Positive（正数）、Nonegative（非負数）、Real（実数）、Complex（複素数）について宣言することができます。

では、Ｘを１未満の実数と宣言して、ＳＱＲＴ（$(1-X)^2$）を簡単化してみましょう。
１－Ｘになりましたか。

次に単に実数と宣言して下さい。｜１－Ｘ｜というように簡単化されるはずです。

なお、Declareについては、Valueという選択もできます。これは、値を入力するもので予め値を固定しておく効果があります。

変数ｙを定義してその値を２とおいてみましょう。

次にy^2+3を作り簡単化すると７になります。

（２）変数の範囲

実数については、変数の範囲をａ＜ｘ＜ｂのように限定することができます。

ただし、ａ，ｂは数値定数。

不等号は、等号を含んだ記号にすることもできます。

また、ａ，ｂについては、無限大を入力することができます。無限大はｉｎｆで表します。マイナス無限大は、－ｉｎｆと入力します。

入力個所は、ａ，不等号，不等号，ｂと４個所あります。それは、ＴＡＢキーで移動します。

それでは、ｘを１≦ｘ＜２と定義してみて下さい。

次に数式、（ｓｑｒｔ（３－ｘ））^{2}を簡単化してみて下さい。３－ｘとなるはずです。

７．関数の定義

（１）再帰的でない定義

自分で関数を定義して使用することができます。

単純な例としてｆ（ｘ）＝ｘ^2＋２ｘ－３を定義してみましょう。

まず、Ｄ－Ｆでｆを入力してリターンを押します。

次に関数の定義を聞いてきますのでｘ^2＋２ｘ－３と入力します。

これで画面上では、ｆ（ｘ）：＝ｘ^2＋２ｘ－３と表示されます。

ここで、ｆ（２）と入力して簡単化すると５と表示されます。

次にｆ（ｆ（ｘ））と入力して簡単化してみて下さい。

また、ｆ（ｆ（ｆ（ｆ（ｘ））））として簡単化して因数分解をしてみて下さい。

次にｆ（ｘ）＝（ｘ＋１）（ｘ－３）と定義して同様に行ってみましょう。

（２）再帰的な定義

次にやや複雑な例として「再帰関数」を定義してみましょう。

関数の定義入力で、if(x＜２, x, f(x-2)+f(x-1))と入力します。

ここで、ｉｆ関数は、ｉｆ（テスト式，正しい場合の値，誤りの場合の値，不明の場合の値）と記載します。なお、上記では、不明の場合は、省略しました。

試みにｆ（５）として簡単化してみましょう。５と表示されれば、正解です。

次にｆ（１．５）と入力してみましょう。何も結果が表示されないまま定義されていない値だからです。上記定義式は、フィボナッチ数列です。この式は、非常に計算時間がかかります。速い計算法は、後で出てきます。

それでは、ｆ（ｎ）＝ｎ！を再帰的に定義してみましょう。

（ヒント：ｆ（ｎ）＝ｆ（ｎ－１）ｎかつｆ（０）＝１です。）

ｆ（１０）を計算して組み込み関数１０！と比較してみましょう。

８．数式の組立

すでに入力されている数式を利用して新しい数式を組み立てることができます。
それがBuildコマンドです。

（ｘ＋１）^{2}／（（ｘ－２）（ｘ＋３））と入力します。

数式番号による指定では、数式全部が対象となってしまいます。左右の矢印キーを動かして分子のみを強調することができます。

Ｂを押して最後のＤｏｎｅのＤを押すと分子のみを取り出すことができます。

同様に分母を取り出すこともできます。

次に分子を強調しておいて、Ｂで＊記号を選択して（スペースキーで移動）、表示される数式番号の代わりに（ｘ＋４）を入れてＤを押すと（ｘ＋１）^{2}（ｘ＋４）が作成されます。

練習問題Ⅲ

（１）次の数式を入力して簡単化しましょう。

① （５ｘ－３ｘ＋１）^{7}－ｘ

② ①の式を（　）内を強調して簡単化して下さい。

③ （ｘ＋１）^{9}＋ｙ

④ ③の場合でＭ－Ｏで変数の優先順位を通常のｘｙｚａｂｃ・・からｙｘと変化させてから簡単化してみて下さい。

（２）次の式を有理数の範囲で因数分解しましょう。

① ２４ｘ^{4}－５０ｘ^{3}＋３５ｘ^{2}－１０ｘ＋１

② ｘ^{5}－１５ｘ^{4}＋８５ｘ^{3}－２２５ｘ^{2}＋２７４ｘ－１２０

③ ５６７ｘ^{4}－１１２５ｘ^{3}＋８１９ｘ^{2}－２５９ｘ＋３０

④ ｘ^{8}＋４ｘ^{6}＋６ｘ^{4}＋４ｘ^{2}＋１

（３）次の式を無理数の範囲で因数分解しましょう。

ｓｑｒｔ（２）－ｘ^{10}

（４）代入しましょう。

① （ｘ＋１／ｘ）^{2} 、ｘ＝３

② Ｘ^{2}ー２Ｘー４＝０の２根をα、βとしたとき次の値を求めて下さい。

α^{2}＋β^{2}，（α－β）^{2} ，１／α＋１／β

答え：１２，２０，－１／２

（５）変数の定義を行います

① －inf＜ｘ＜０

② １≦ｘ＜inf

③ ０≦ｘ

④ ０＜ｘ

⑤ ｘは複素数

（６）関数の定義を行い値等を計算します。

①　ｆ（ｘ）＝$ｘ^{１０}$－１でｆ（８）

桁数が足りなくて厳密な数字が求まらない場合は、桁数を増やしてみます。

数字が得られたらば、因数分解をしてみましょう。

②　ｆ（１）＝２としてｆ（ｎ）＝$２^{ｆ（ｎ－１）}$と再帰的に定義します。

ｆ（１）～ｆ（４）を求めてみましょう。

これは、アッカーマンの関数の例で大きい数字がすぐに現れます。

③　ｆ（ｘ，ｎ）＝ｎ（$ｘ^{（１／ｎ）}$－１）と定義してｘ＝２について、ｎ＝２，１０，２０，４０の場合について数値的に調査しこれが$ｌｏｇ_{ｅ}$（２）（　０．６９３１４７１８・・）　に近づくことを確かめて下さい。

事実、ｎ＝infのときに$ｌｏｇ_{ｅ}$（２）に一致します。

④　ｎ＝$２^{ｍ}$と代入した場合は、平方根の計算ができる電卓があれば、容易に$ｌｏｇ_{ｅ}$（ｘ）　が計算できることを確認してください。

⑤　ｆ（ｘ，ｙ）＝｜$ｘ^{２}$－$ｙ^{２}$｜として下さい。｜　｜は、ａｂｓ（ｘ）と入力します。

⑥　ｆ（ｘ，ｙ）=ｍａｘ（ｘ，ｙ）として下さい。　ｍａｘ（　）は、（　）内の最も大きい数値を与える関数です。確認しましょう。

⑦　同様にｍｉｎ（ｘ，ｙ，ｚ）として下さい。ｍｉｎ（　）は、（　）ないの最も大きい数値を与える関数です。確認しましょう。

⑧　同様にaverage（数値リストの平均）、ｇｃｄ（数値リストの最大公約数）、ｌｃｍ（数値リストの最小公倍数）についても確認しましょう。ここで、数値リストとは、数値又は変数を「，」で区切って並べたものです。

特にｇｃｄ（１００！，$２^{１００}$）を計算してみましょう。桁数が足りなくて正確な答えが得られない場合は、有効数字を大きくします。

⑨　ｍｏｄ（ｍ，ｎ）は、ｍをｎで割った余りを与える関数です。

ｍｏｄ（$ａ^{（ｐ－１）}$，ｐ）＝１、ただし、ｐは素数でａは、ｐの倍数でない場合。

これは、フェルマーの小定理と呼ばれていますが、ａ＝２についてｐ＝３，５，７，９，１１，９７等について確認しましょう。

Ⅳ　方程式

ここでは、有理数の係数の代数方程式を考えます。

三角関数や対数関数その他の超越関数に関する方程式は、次章以降で考えます。

１．１次方程式

ａｘ＋ｂ＝０の形式の方程式です。数式処理を持ち出すまでもありませんが、一応順序なので確認しつつ進みましょう。

このように右辺がゼロの形の方程式は、＝０を省いて、ａｘ＋ｂと入力します。

そして、Ｌと押します。どの変数について解くかを聞いてきますのでｘを入力してリターンを押すと、ｘ＝－ｂ／ａと表示されます。

数学的には、ａ＝０の時は、ｂ＝０以外は、不能、ｂ＝０の場合は、不定ということになりますが、ＤＥＲＩＶＥは、そんな細かい点は、注意してくれません。使用する人が確かめて下さい。

２．２次方程式

同様に$ax^2+bx+c=0$の解も容易に求まります。

いわゆる、根の公式が出てきますが通常、解は、ｘ＝・・、ｘ＝・・と改行して別々の数式番号が付与されて出てきます。

これについても、特にいうことはないでしょう。ただし、２次方程式以降は、一般に複素数が現れます。数学では、よくｉで虚数単位を表しますが、ＤＥＲＩＶＥでは、＃ｉで表します。

なお、解が得られた場合に、実際の問題に対する適用に当たっては、得られた根を元の問題に適用して吟味を行うことを忘れてはいけません。

３．３次及び４次方程式

解法は同様ですが、いずれも、一般解は、複雑です。

数値例で検討してみましょう。

次の方程式を考えます。

$x^3+x^2+x-1=0$、

$x^4+x^3+x^2+x+3=0$

いずれも解を求めて次に解を元の方程式に代入して確認してみましょう。

代入する場合は、buildコマンドとＭ－Ｓコマンドで代入しましょう。

４．５次以上の方程式

ガロアの理論によれば、５次以上の代数方程式には、解の公式（根号と加減乗除によるもの）は、存在しません。

従って、うまく因数分解ができる場合を除き、ＤＥＲＩＶＥでも厳密解は見つかりません。

それでは、数値解法では、どうでしょうか。

$x^5+x^4-5x^3-10x^2+9x+20=0$を数値的に解いてみましょう。まず、解の一つを見つける必要があります。

それには、グラフによる方法が最も効果的です。（奇数次の方程式には、実根が必ず１つ存在します。）

Ｐ－ＢでＰと押しますとグラフが描けます。グラフに描かれている範囲を拡大したい場合は、ｏｕｔの方に強調している部分を移動した後にｚを押します。

するとｘ軸を横切っているグラフの一部が見えてきます。矢印カーソル（＊）を動かすとｘ＝－１．３９辺りであることが左下の座標値から分かります。

そこでWを押してＣを押してウィンドウを閉じてしまいましょう。

次にＯ－Ｐで計算モードをapproximateモードにしておくことを忘れないで下さい。

Ｌを押して、値の検索範囲を－１．５と－１．３の間に設定します。

すると、ｘ＝－１．３９８９４と直ちに６桁の精度で答えが求まります。次には、与式を（ｘ＋１．３９８９４）で割ります。式の簡単化には、ＳではなくＥを押します。

すると６桁の精度で、商から、

$x^4-0.398940x^3-4.44190x^2-3.78603x+14.2964=0$が得られますので、

ｍｉｘｅｄモードで解いてXで近似値を求めたいところですが計算に時間がかかりそうです。

そこで、ニュートン法（後述）によって複素解を求めます。

ニュートン法というのは、ｘ－ｆ（ｘ）／ｆ（ｘ）’の近似式においてｘの第０近似値から出発して逐次解を求めるものです。（分母は、ｆ（ｘ）の微分）

それによると、

-1.6375-1.20029i及び1.83698+0.30616iとそれぞれの共役複素数が残りの解となっています。

ニュートン法については、微分法の応用のところで学びますので、ここでは、説明しません。

５．連立１次方程式

連立一次方程式は、次のように入力します。

例えば、$2x+y=3$，$x-y=1$の場合は、

［$2x+y=3$，$x-y=1$］

そして、Ｌで解けます。

３元以上の場合も同様です。

それでは、例題２題です。

２Ｘ＋Ｙ＋Ｚ＝３

２Ｘ＋２Ｙ＋３Ｚ＝６

４ＸーＹーＺ＝０

Ｘ　　＋Ｙ／２＋Ｚ／３＝１１／６

Ｘ／２＋Ｙ／３＋Ｚ／４＝１３／１２

Ｘ／３＋Ｙ／４＋Ｚ／５＝４７／６０　　　（答え：Ｘ＝Ｙ＝Ｚ＝１）

２題目については、APPROXIMATEモードでも解いてみて解を比べてみましょう。

６．他の方程式

（１）高次の連立方程式

２次以上の項を含んだ高次の連立方程式は、簡単には解けません。
ＤＥＲＩＶＥでは、１つの変数を他の変数で解き、他の方程式に代入し変数の数を減少させるという方法で解くことができます。

例えば、$X^2+Y^2=3$，Ｘ－３Ｙ＝７のような場合は、まず、第２式からＸ又はＹを他の変数で表し第１式に代入して２次方程式を解きます。

ただし、注意しなければならないことは、必ず、解を吟味する必要があることです。

（２）無理方程式

根号を含んだ方程式については、簡単なものですとＬコマンドで解けます。

例えば、ＳＱＲＴ（$1-X^3$）＝０のようなものです。

また、ＳＱＲＴ（Ｘ＋２）＋ＳＱＲＴ（Ｘ－３）＝ＳＱＲＴ（３Ｘ＋４）

でもＬコマンドでＸ＝７が得られます。

Ｌコマンドで解けない場合、連立方程式の場合等は、前述のように変数を減らしていく方法が必要です。

（３）指数方程式

$3^{2X+1}+7=15$では、Ｌコマンドで２つの解が得られます。Ｘを実数と限定すれば、虚数単位を含まない方が解となります。

それでは、$4^X+6^X=9^X$を試みて下さい。簡単に解けましたか。

７．不等式

ＤＥＲＩＶＥでは、不等式も解ける場合があります。

次のような不等式を考えます。

｜３Ｘ＋２｜＞５、この式を入力してＬコマンドで解を求めて下さい。

一般に不等号を等号にした方程式が解ければ、解が求まる可能性があります。

練習問題Ⅳ

（１）次の方程式の厳密解又は数値解を求めましょう。

① $3X+2=13$

② $X/2+1/3=1/5$

③ $X^{2}+3X-10=0$

④ $X^{2}+3X+13=0$

⑤ $X^{3}-10X^{2}+3X+2=0$

⑥ $X^{4}-X^{3}+X^{2}-X+13=0$

⑦ Ｘ５＋3.7565Ｘ４＋8.75955Ｘ３－9.0683Ｘ２＋0.818169Ｘ＋1.03648＝０

これは、数値的に解きましょう。まず、グラフをプロットとして実数解の大体の値を見つけます。次に方程式の次数を下げてＬコマンドで解きます。この際、APPROXIMATEモードでないといけません。

（答え：Ｘ＝0.5215，1.5,-0.265，1+2i，1-2i）

（２）次の方程式の厳密解又は数値解を求めましょう。

① $5X+2Y=2,\ 3X-6Y=5$

② $-(1+1/4)X+Y+Z/4=-1$

$X-(1+1/3+1/2)Y+Z/3+W/2=0$

$X/4+Y/3-(1/4+1/3+1/5)Z+W/5=0$

$Y/2+Z/5-(1/2+1/5)W=1$

ヒント：答えは、不定でパラメータが入ります。パラメータをゼロとして解を求めて下さい。

③ $2X-Z+W=10$

$4X+3Y-Z/2-W=21+(1/2)$

$2X+Y-3Z+2W=26$

$3Y-4Z=37$

④　$2^X-3^Y=2$，$X+2Y=3$の解を求めて下さい。

　Ｘをについて解き第１式に代入します。次にグラフをプロットして解の見当をつけた上でAPPROXIMATEモードで解きます。正解は、Ｘ＝1.92707・，Ｙ＝0.536461・です。

⑤　$(2^X)^2-6*2^X+8=0$　答え　Ｘ＝１，２

⑥　$2^{2X}-32^X-4>0$　　答え　Ｘ＞２

⑦　$4(4^X+4^{-X})-25(2^X+2^{-X})+42=0$　答え　Ｘ＝０，－２，２

（３）次の問題を解きましょう。

①　石を速度ｖ、角度θ（０＜θ＜π／２）で投げました。空気の抵抗は、無視して、重力定数は、ｇ、このとき、石の届く距離を求めて下さい。

方程式は、次のようになります。水平方向にＸ軸、垂直方向にＹ軸を取り上方向を正とします。投げ上げた位置は、ｈとします。

$X=vt\,SIN(\theta)$、$Y=-gt^2/2+vt\,COS(\theta)+h$

これを解いて到達距離Ｌを求めて下さい。

②　２つの半径の異なった円があります。２つの円は、水平直線上で互いに円周で接しています。中心間の水平距離を求めて下さい。

半径は、それぞれａ，ｂ（ａ＞ｂ）とします。

方程式は、$X^2+(Y-a)^2=a^2$、$(X-Z)^2+(Y-b)^2=b^2$及び

$(a-b)/Z=(Y-b)/(Z-X)$の３つです。

ここで、Ｘ，Ｙは、交点の座標、Ｚは、小円の中心のＸ座標です。

（原点は、大円の円周と水平直線との接触している点としています。従って、Ｚがこの問題の答えです）

正解は、Ｚ＝２ＳＱＲＴ（ａｂ）です。ちなみにＸ＝２ａＳＱＲＴ（ａｂ）／（ａ＋ｂ）

Ｙ＝２ａｂ／（ａ＋ｂ）です。

（注１）数式を入力する際には、変数名が単語単位になっていることに注意して下さい。従って、ａｓｑｒｔ（ａ）は、ａｓｑｒｔという関数と考えられてしまいます。必ず、積の記号＊を忘れないようにして下さい。

（注２）この問題は、図形を書いて考えると容易に解けます。考えてみましょう。

③　長径ａ、短径ｂの楕円があります。この楕円と直線、ａｘ＋ｃ＝ｙとの交点を求めて下さい。

また、交点が存在する条件についても検討して下さい。

ここで、楕円の方程式は、（Ｘ／ａ）^{2}＋（Ｙ／ｂ）^{2}＝１とします。

④　円、Ｘ^2＋Ｙ^2＝１があります。この円と直線、ａＸ＋ｂ＝Ｙが交差している場合に、交差している部分の長さを求めて下さい。（答え：４（ａ^2－ｂ^2＋１）／（ａ^2＋１））

また、交差する条件についても検討して下さい。

Ⅴ　初等関数

　初等関数の定義は、明確なものはありませんが、本章では、一次関数等の整関数、無理関数以外の指数関数、対数関数、三角関数等を取り上げます。

１．指数関数・対数関数

（１）指数関数

　これまでも指数関数は、使用してきましたので、ここでは、指数関数を含んだ式の簡単化する際の方向を変更する方法について説明します。

　Ｍ－ＥコマンドでAUTO,COLLECT,EXPANDの３つのサブメニューがあります。
通常は、AUTOが選択されていますが場合によっては、他のメニューを選択した方が式の変形がうまくいく場合があります。

（２）対数関数

　ＤＥＲＩＶＥでは、自然対数は、ＬＮ（Ｘ）と書きます。また、底がｅでない対数は、ＬＯＧ（Ｘ，ａ）でａを底とする対数関数を表します。ＬＯＧ（Ｘ，ｅ）はＬＮ（Ｘ）と簡単化されます。

　対数関数においても簡単化の方向を調節するオプションがあります。それは、Ｍ－Ｌコマンドです。これは、AUTO,COLLECT,EXPANDの３つがあります。デフォルトでは、AUTOが選択されています。

　次の問題を考えましょう。$2^{(3/\mathrm{LOG}(X,\ 3))}$＝１／６４

　Ｌコマンドで解がいくつかでますが実数解は、ＳＱＲＴ（３）／３です。

　もう一つの問題は、ＬＯＧ（Ｘ，２）＋ＬＯＧ（Ｘ，３）＋ＬＯＧ（Ｘ，４）＝１
これは、Ｘ＝$2^{2\mathrm{LOG}(3,\ 108)}$となります。ＤＥＲＩＶＥで得られる解は、見かけは違いますが両者が同一であることを引き算することにより確認しましょう。

２．三角関数・逆三角関数

（１）三角関数

　ＤＥＲＩＶＥの三角関数は、ＳＩＮ、ＣＯＳ、ＴＡＮ、ＣＯＴ、ＳＥＣ、ＣＳＣです。最後のものは、コセカント（１／ＳＩＮ（Ｘ））です。

　三角関数についても簡単化する際の方向を定めるオプションがあります。

　これは、Ｍ－Ｔコマンドで変形の方向をコントロールできます。
サブメニューには、６つあります。まず、これまでと同様にAUTO,COLLECT,EXPANDと３つあります。また、TOWARDオプションは、AUTO,SINES,COSINESでCOS^2 (X)->1-SIN^2 (X)と変形させるにはSINESを選択します。逆は、COSINESです。デフォルトでは、AUTOになっています。

　では、問題です。SIN(X)+SIN(2X)+SIN(3X)=0、０≦Ｘ≦２πで考えます。

　この問題では、上記のオプションを上手に使用すると容易に解が求まります。

次の問題は、SIN(X)+SIN(2X)+SIN(3X)=1+COS(X)+COS(2X)でＸが正でπより小さい解をまとめなさい。答えは、π／６，π／２，２π／３，５π／６です。

（２）逆三角関数

基本的な逆三角関数としてＡＴＡＮ（Ｘ）があります。これは、ＴＡＮ（Ｘ）の逆関数です。値は、主値（－π／２～π／２）をとります。

Ｘ軸の正の側から半時計回りに座標点（Ｘ，Ｙ）まで回転した角度は、ＡＴＡＮ（Ｙ，Ｘ）となります。Ｘ，Ｙが逆なことに注意して下さい。

このほかの逆三角関数については、次のものがあります。

ＡＣＯＴ（Ｘ）：π／２－ＡＴＡＮ（Ｘ）：主値は、（－π～π）

ＡＳＩＮ（Ｘ）：主値は、（－π／２～π／２）

ＡＣＯＳ（Ｘ）：＝π／２－ＡＳＩＮ（Ｘ）：主値は、（０～π）

ＡＳＥＣ（Ｘ）：＝ＡＣＯＳ（１／Ｘ）

ＡＣＳＣ（Ｘ）：＝ＡＳＩＮ（１／Ｘ）

ここで例題です。ＳＩＮ（Ｘ）＝１／２、解は、Ｘ＝ＡＳＩＮ（１／２）で、その値はπ／６ですが、０～２πで考えると５π／６がもう一つの解としてあります。

直接、与式をＬコマンドで解いた場合は、この解も得られます。

これは、ＳＩＮ（Ｘ＋Ｙ）＝ＳＩＮ（Ｘ）となる場合は、Ｙ＝０の他にＹ＝π－２Ｘのケースがあり、このケースでは、ＳＩＮ（π－Ｘ）＝ＳＩＮ（Ｘ）ですのでπ－Ｘ＝ＡＳＩＮ（１／２）とするとＸ＝５π／６が得られます。

逆三角関数は、多価関数であることから普通の関数と異なった注意が必要です。

３．双曲線関数

双曲線関数については、簡単に触れます。

ＳＩＮＨ（Ｘ）＝（$e^{X}-e^{-X}$）／２

ＣＯＳＨ（Ｘ）＝（$e^{X}+e^{-X}$）／２

ＴＡＮＨ＝ＳＩＮＨ（Ｘ）／ＣＯＳＨ（Ｘ）

双曲線関数については、三角関数と類似した加法定理等が成立しています。

次の関係式をＤＥＲＩＶＥで確認してください。

COSH2(X)-SINH2(X)=1

SINH(X+Y)=SINH(X)COSH(Y)+COSH(X)SINH(Y)

COSH(X+Y)=COSH(X)COSH(Y)+SINH(X)SINH(Y)

SINH(-X)=-SINH(X)

COSH(-X)=COSH(X)

ただし、ＤＥＲＩＶＥでは、式を簡単化した場合に、双曲線関数でまとめずに指数関数で表しますので注意が必要です。

更に、複素数の範囲で考えた場合は、周期性も類似した傾向を示します。

次の式を入力して簡単化してみましょう。

ＳＩＮＨ（Ｘ＋２πｉ）、結果は、ＳＩＮＨ（Ｘ）というように２πｉを周期とした周期関数であることが分かります。

練習問題Ｖ

（１）次の問題を解きましょう。

①　ｅ^{X}＋ｅ^{Y}＝１、Ｘ－Ｙ＝１０

②　ｅ^{X}＋ｅ^{Y}＝１、Ｘ－２Ｙ＝１０

③　ＬＮ（Ｘ＋２Ｙ）＝－Ｘ＋３Ｙ、Ｘ＋Ｙ＝１０
　これは厳密には解けません。近似値を求めましょう。
　答え：Ｘ＝６．８５６０１、Ｙ＝３．１４３９９

④　ＳＩＮ（Ｘ）＋ＳＩＮ（２Ｘ）＋ＳＩＮ（３Ｘ）＝０でＸが０～２πのもの
　答え：Ｘ＝０，π，π／２，２π／３，４π／３，３π／２

⑤　ＳＩＮ（Ｘ）－ＣＯＳ（Ｘ）＝ＳＱＲＴ（３）／２
　答え：Ｘ＝ＡＴＡＮ（ＳＱＲＴ（１５）／５）＋π／４

⑥　ＳＩＮ^{2}（Ｘ）－ＣＯＳ^{2}（Ｘ）＝π／６でＸが０～πのもの。
　答え：π／２±ＡＳＩＮ（ＳＱＲＴ（３（６－π））／６）の２個

⑦　２^{X}＝５^{Y}＝１０^{Z}の時に１／Ｘ＋１／Ｙ＝１／Ｚを証明しなさい。（ＸＹＺ≠０）

⑧　４^{X}－１７＊２$^{X-1}$＋４＜０　答え　－１＜Ｘ＜３

⑨　ＳＩＮ（Ｘ）＋ＣＯＳ（Ｘ）＝３ＳＱＲＴ（５）／５の時にＳＩＮ（２Ｘ）の値
　答え　３／５

⑩　ＴＡＮ（Ｘ）－１／ＴＡＮ（Ｘ）＝１／ＳＩＮ（Ｘ）－１／ＣＯＳ（Ｘ）
　ただし、－π＜Ｘ＜π　答え　３π／４，π／２

⑪　SIN(X)+SIN(3X)+SIN(5X)+SIN(7X)＝4COS(X)COS(2X)COS(4X)を証明して下さい。

⑫　LOG(1-4X,2)+LOG(1+X,2)=2LOG(5X+4,3)
　答え　Ｘ＝－１／２

⑬　４ａｔａｎ（１／５）－ａｔａｎ（１／２３９）＝π／４を証明しなさい。
　上記は、マチンの公式といいπの計算によく用いられます。

（２）次の問題を解きましょう。

①　半径１の円があります。切断後の円の面積を元の３分の２とするように直線で円を切断します。この直線と円の中心との最短距離は、いくらでしょうか。

方程式は、θを補助変数として、θ＝π／６－ＳＩＮ（θ）ＣＯＳ（θ）を解き

最短距離は、ｈ＝ＳＩＮ（θ）として求まります。

答え：ｈ＝０．２６４９３１・・　（数値解）

②　半径３の大円と半径２の中円が水平線上で一点で接触しています。ここに半径１の小円を乗せ、大円と中円に一点で接触させた場合の中円のＹ座標と小円のＸ，Ｙ座標を求めて下さい。

大円の中心（０，３）、中円（ＸＢ，２）、小円（ＸＣ，ＹＣ）として距離の関係から、次の式が得られます。

ＸＢ^2＋（３－２）^{2}＝（３＋２）^{2}

（ＸＣ－ＸＢ）^{2}＋（ＹＣ－２）^{2}＝（２＋１）^{2}

ＸＣ^2＋（ＹＣ－３）^{2}＝（３＋１）^{2}

この方程式を解いて、答えは、

ＸＢ＝２ＳＱＲＴ（６）＝４．８９８９・・、

ＸＣ＝３２ＳＱＲＴ（６）／２５＋１２／２５＝３．６１５３・・

ＹＣ＝２４ＳＱＲＴ（６）／２５＋５９／２５＝４．７１１５・・

③　直径１の半球の体積を２等分するように半球の底面に平行な平面で切断する際の平面の高さを求めなさい。（まんじゅう方程式の問題）

方程式は、平面までの距離をＸとすると、Ｘ^3－３Ｘ＋１＝０です。

答えは、２ＳＩＮ（π／１８）＝０．３４７２９・・です。

④　２点（－３，３）、（５，７）を通り、Ｘ軸から長さ８の線分を切り取る円の中心の座標を求めて下さい。

円の方程式を（Ｘ－ａ）^{2}＋（Ｙ－ｂ）^{2}＝Ｒ^{2}としてＹ＝０となるＸの値を求めて距離を８とおけば、２ＳＱＲＴ（Ｒ^2－ｂ^2）＝８、これと２点が円の方程式を満たすことから３つの方程式が得られます。

答え　ａ＝２，ｂ＝３，Ｒ＝５又はａ＝－２０，ｂ＝４７，Ｒ＝５ＳＱＲＴ（８９）

Ⅵ　グラフ表示

ＤＥＲＩＶＥでは、数式を画面にグラフとして表示することができます。

これまでも２，３の問題で利用してきましたが本章では、グラフ表示の方法について説明します。

１．２次元ウィンドウ

（１）プロット

一変数の数式を入力して数式を２次元平面上にプロットしてみましょう。

式は、X^2＋１のような等号を含まない式か、Ｙ＝・・・という形の式に限られます。

まず、矢印キーでカーソルを移動し式を強調します。そして、Ｐを押します。

その際にBESIDE，UNDER,OVERLAYの３つの選択ができます。BESIDEは、画面右半分にグラフを表示します。UNDERは、画面下部に表示します。そして、OVERLAYは、画面全部を使用してグラフを表示します。

通常は、Ｂ又はＯを選択します。するとプロットウィンドウが表示されます。

まず、Ｐを押すと数式がプロットされます。

プロットされたグラフを拡大又は縮小する場合、グラフがウィンドウ上に見つからない場合等においては、Ｚｏｏｍを利用します。Ｚを押すと拡大（OUT）、縮小（IN）を行う際のDIRECTIONとＸ又はＹ又は両方(BOTH)についてそれを行うかを指定することができます。

ＡｘｉｓとDirectionとの強調部分の移動はＴＡＢキーで、その中の移動は、スペースキーで行うことは、他のサブメニューと同様です。

ウィンドウ上には＊印形の点があって（ウィンドウ外に出ている場合もありますが）矢印キーで移動できます。その点のＸ，Ｙ座標値は、ウィンドウ左下に表示されています。

例を挙げましょう。

次の式をプロットしてみましょう。$-X^2$＋１０Ｘ＋２

そしてＸ軸との２つの交点がウィンドウ上に表示されるまで拡大してみましょう。その上で、＊カーソルを移動させて、交点のＸ座標値を読みとり、厳密解と比較してみましょう。

（厳密解は、５－３ＳＱＲＴ（３），５＋３ＳＱＲＴ（３））

なお、Ｏ－Ｎコマンドで数値の表示桁数を調整することもできます。

（２）ウィンドウの主な各種パラメータ

① Ｔｉｃｋｓ

縦横比率を変更することができます。現在の値で、ROWS（列方向）が１０、COLUMNS（行方向）２２でほぼ正円が表示できますがディスプレイの種類等で正円が表示できない場合は、ここの値を調整してみて下さい。

② ＳＣＡＬＥ

ＳＣＡＬＥは、表示範囲を指定します。Ｘ，Ｙとも別々にも指定できます。

③　ＯＰＴＩＯＮ

Accuracy：精度は、数値が大きいほど精度の高い描画を行います。

Notation：前述のように＊の位置の表示精度を変更できます。

④　ＤＥＬＥＴＥ

グラフを消去します。FIRSTは、最初のグラフを消去、LASTは、最後のグラフを消去、BUTLASTは、最後以外をすべて消去、ALLは、すべて消去します。

⑤　ＣＥＮＴＥＲ

＊印を中心とするように表示します。

従って、グラフの特定の部分を拡大したい場合などは、まず、＊をその付近に持ってきてＣと押せばグラフの中心が移動します。そこで縮小すれば、精度よく観察できます。

（３）極座標表示

Ｏ－ＳコマンドでRectagular（直交座標表示）ではなく、Polar（極座標表示）を選択すると極座標でグラフが描かれます。

この場合、角度座標の変化する範囲を指定することができます。デフォルトでは、－π～πです。

数式は、$Y = X^2 + 1$のように入力されていてもＹは動経、Ｘは、角度と解釈されプロットされます。

それでは、$X^2 - 1$を－π～πでプロットしてみてください。

次に極座標で表示した円を表示させましょう。これは、１又はＹ＝１でＯＫです。

このように次々とプロットしていくと色は自動的に変化していきます。

（４）ウィンドウのクローズ

ウィンドウを閉じる場合は、Ｗ－Ｃでウィンドウ番号（通常は、２）を確認してリターンを押します。

２．３次元ウィンドウ

（１）プロット

Ｚ＝Ｆ（Ｘ，Ｙ）のように２変数の式は、３次元で表示することができます。それには、上記のように入力するか、又は、右辺のみ入力してＰを押します。

次に３次元ウィンドウメニューの中でＰを押すと表示がなされます。

視点の位置により形状は、変化します。プロットの色が変化している部分は、表裏を明らかにするためです。

それでは、次の式をプロットしてみて下さい。

$$(9 + X^2 + (Y - 3)^2)^{-1} + (9 + X^2 + (Y + 3)^2)^{-1}$$

（２）主な各種パラメータ

①　Ｇｒｉｄｓ

形状を表すための線（ワイヤーフレーム）の細かさを示します。大きくすると表示に時間はかかりますが明細に表示されます。

②　Ｅｙｅ

視点です。視点の位置を変えることができます。Ｘ，Ｙ，Ｚの各値で指定します。

③　Ｆｏｃａｌ

焦点の座標値を自動（デフォルト）にするか、手動にするかを決定します。

④　Ｃｅｎｔｅｒ

図形の中心位置を指定します。Ｃを押すと自動的に中心がウィンドウの中心にきます。

⑤　Ｌｅｎｇｔｈ

図形は、透明な直方体の箱に入っていると想像してみて下さい。
表示されているのは、その直方体の箱の範囲内が表示されています。Ｌｅｎｇｔｈでは、この直方体のＸ，Ｙ方向の大きさを指定できます。デフォルトでは、１０ｘ１０の大きさです。

⑥　Ｚｏｏｍ

Ｚにより２次元の場合と同様に視点を近づけたり遠ざけたりすることができます。

⑦　Ｈｉｄｅ

隠れている面を非表示（デフォルト）にするか表示するかを指定できます。

⑧　Ｏｐｔｉｏｎ－Ａｘｅｓ

デフォルトでは、直交軸を表示していますが非表示にすることもできます。

ここで、ＮＯを選択して下さい。

⑨　（１）の数式のプロットを例にしていくつかのパラメータを変化させて見て下さい。

（３）ウィンドウを閉じる

２次元の場合と同様です。Ｗ－Ｃです。

３．画面コピー

表示している画面をコピーすることができます。

これは、単にＣＯＰＹキーを押すことにより行うことができます。

下記に画面コピーで得た、X^2-Y^2の図を掲げます。このとき、プリンタをＡ４横位置に調整して下さい。Ａｉ７０００であれば、Ａ４ポートからＡ４ランドにして下さい。

練習問題Ⅵ

（１）次の式のグラフを直交座標で描きましょう。

①　ＳＩＮ（Ｘ）

②　ＣＯＳ（Ｘ）

③　ＴＡＮ（Ｘ）

④　ＳＥＣ（Ｘ）

⑤　ＣＴＮ（Ｘ）

⑥　ＣＳＣ（Ｘ）

⑦　ＳＩＮＨ（Ｘ）

⑧　ＣＯＳＨ（Ｘ）

⑨　ＴＡＮＨ（Ｘ）

⑩　（Ｘ－１）（Ｘ－２）（Ｘ＋１）

⑪　（Ｘ－１）／（$Ｘ^2$＋１）

⑫　Ｘ＝ＳＩＮ（Ｔ）、Ｙ＝ＣＯＳ（２Ｔ）

これは、［ＳＩＮ（Ｔ），ＣＯＳ（２Ｔ）］のように入力しプロットします。

変域を聞かれますので適宜、指定できます。

（２）次の式を極座標で描きましょう。（以下では、Ｘは角変数です）

①　１／（１－２ＣＯＳ（Ｘ））

②　１／（１－０．５ＣＯＳ（Ｘ））

③　ＣＯＳ（２Ｘ）

（３）３次元プロットをしてみましょう。

① ＳＱＲＴ（１ー$Ｘ^2$ー$Ｙ^2$）

うまく表示されない場合は、Ｚコマンドで縮小してみましょう。

② ＳＱＲＴ（１＋$Ｘ^2$－$Ｙ^2$）

③ ＳＱＲＴ（$Ｘ^2$＋$Ｙ^2$－１）

④ ＳＱＲＴ（１－（ＳＱＲＴ（$Ｘ^2$＋$Ｙ^2$）－５）^{2}）

これは、トーラスというドーナツ型の上半分に当たっていますが、Ｘ及びＹの変域を４≦Ｘ≦６というように制限して下さい。

また、LengthをＸ＝Ｙ＝１２、Ｅｙｅを４８，４８，１５ぐらいがちょうどよいようです。下記のような図が得られます。

Ⅶ　微積分

本章では、微分、積分を扱うことになります。主として、初等関数についてですが、初等関数の微分が常に初等関数になるのに対して、積分は、複雑な様相を呈します。

まずは、数式の極限について調べることから始めましょう。

１．極限

ＤＥＲＩＶＥでは、ＣコマンドでＬｉｍｉｔを選択すると変数の近づく値と近づき方、すなわち、右側（Ｘが大きい方から）か、左側（小さい方からか）、両方からかについて選択することができます。

$\lim_{X\to 0}$ ＳＩＮ（Ｘ）／Ｘは、１ですが確認してみましょう。

ＤＥＲＩＶＥでは、右から近づく場合は、Ｘ－＞０＋と表示されます。

両方からの場合は、Ｘ－＞０だけです。

それでは、$\lim_{X\to 1}$ （ＳＱＲＴ（Ｘ）－１）／（Ｘ^3－１）を調べて下さい。

答えは、１／６です。

次にＸ－＞infの例です。$\lim_{X\to inf}$ （ＳＱＲＴ（Ｘ^2＋８Ｘ－１）－ＳＱＲＴ（Ｘ^2－３））

答えは、４です。infは、ｉｎｆと入力することは以前説明いたしました。

２．微分

（１）微分

次の式をＸで１回微分してみましょう。　Ｘ^3＋ａＸ^2－ｂＸ＋１

Ｃ－Ｄコマンドでどの変数で微分するかを指定できますのでＸであることを確認し

次に何回微分するのかを（Orderで）指定します。ここでは、１です。

ＤＥＲＩＶＥでは、$\frac{d}{dx}$Ｘ^3＋ａＸ^2－ｂＸ＋１と表示されます。

ここで簡単化するＳコマンドで微分がなされます。

それでは、例題です。ＳＩＮ（Ｘ）／ＣＯＳ^2（Ｘ）をＸで１回微分して下さい。

なお、注意しなければならない点としては、Ｘ^2＋Ｙ^2＝１からｄｙ／ｄｘを求める場合は、このままＸで微分すると２Ｘ＝０となります。ＹがＸの関数として理解されていないからです。どうしてもｄｙ／ｄｘを求めたい場合は、ＹをＸで解いて微分して下さい。

または、関数の定義でＹ（Ｘ）：＝とＹがＸの関数であることを宣言した後に関係式をＸで微分するとｄｙ／ｄｘが得られます。

なお、微分係数は、点Ｘの値を代入することにより求まります。

（２）Ｎｅｗｔｏｎ法

ここでは、ｎｅｗｔｏｎ法を取り上げます。

前述のようにｘのｎ番目の近似解をｘ－ｆ（ｘ）／ｆ’（ｘ）で求めるものです。

ＤＥＲＩＶＥでは、ｉｔｅｒａｔｅｓ関数を用いて次のように定義します。

ｉｔｅｒａｔｅｓ（ｘ－ｆ／ｄｉｆ（ｆ，ｘ），ｘ，x_0）と入力します。そして、Ｘコマンドで実行します。

ｉｔｅｒａｔｅｓ関数は、第３項を元に第１項を計算して第２項に代入することを繰り返し行う関数です。定義されている桁数の範囲で変化しない答えが得られると停止します。

x_0の選び方が悪いと発散してしまう場合がありますので、打ち切り回数を指定することができます。ｉｔｅｒａｔｅｓ（ｆ，ｘ，x_0，ｎ）として打ち切り回数をｎで指定します。ｉｔｅｒａｔｅ関数で生成されるのは、後述のベクトルです。各要素は、逐次のｘの値です。最後の値を取り出す場合は、後述のｅｌｅｍｅｎｔ（ベクトル，ｎ）関数で近似値が得られます。

ここでは、$x^2-2=0$についてｘの解を求めて下さい。

答え　ｘ＝ｓｑｒｔ（２）＝１．４１４２・・

３．テーラー展開

微分法の応用としてテーラー展開は、重要です。

次の関数をＸ＝０で展開してみましょう。ＳＩＮ（Ｘ）

Ｃ－Ｔコマンドで展開の位置と次数（デフォルトでは５）を入力します。

ＤＥＲＩＶＥでの表現は、ＴＡＹＬＯＲ（ＳＩＮ（Ｘ），Ｘ，０，５）となります。

これを簡単化して５次までのテーラー展開が求まります。

では、e^Xの１０次までのＸ＝０でのテーラー展開を求めて下さい。

４．積分

ＤＥＲＩＶＥでは、変数の変域を指定しないと不定積分が得られます。

例えば、∫ＳＩＮ（Ｘ）ｄｘは、Ｃ－Ｉコマンドで積分変数を指定した上で変域を指定しないと表示は、∫ＳＩＮ（Ｘ）ｄｘのように表示され、簡単化すると－ＣＯＳ（Ｘ）が得られます。

また、定積分では、変数の変域を入力することにより値が求まります。

例として、$\int_{X=0}^{X=1} e^{-X}\,dx = 1-1/e$が得られます。

無限積分についても同様の扱いが可能です。$1/(1+X^2)^2$を０～infまで定積分すると答えとしてπ／４が得られます。

５．和及び積

（１）和

　Ｃ－Ｓコマンドで和が求まります。例えば、ｋの１～ｎまでの和を求めてみましょう。式は、ｋとのみ入力します。Ｃ－Ｓコマンドで和を取る変数を指定した上で（ここではｋしかないが）変数の取る範囲を１からｎと入力します。

　答えはみなさんご存じの$\sum k = n(n+1)/2$となります。最後は、簡単化コマンドを実行します。

　では、$\sum k^3$を求めて下さい。変域は、同様です。$n^2(n+1)^2/4$となります。

（２）積

　Ｃ－Ｐコマンドで同様に実行します。簡単な例では、ｋの１からｎまでの積は、ｎ！と求まりましたか。方法は、和の場合とほとんど同様です。

練習問題Ⅶ

（１）次の極限を求めなさい。

①　ｌｉｍ　Ｘ＊ＳＩＮ（１／Ｘ）
X->0

答え　０

②　ｌｉｍ　（ＣＯＳ^{n}（Ｘ）－ＳＩＮ^{n}（Ｘ））／（ＣＯＳ^{n}（Ｘ）＋ＳＩＮ^{n}（Ｘ））
X->inf

答え　１

③　ｌｉｍ　（（ｎ＋１）ＣＯＳ（１／（ｎ＋１））－ｎＣＯＳ（１／ｎ））
X->inf

答え　１

（２）次の微分に関する問題を解いて下さい。

①　ＳＱＲＴ（（Ｘ^{2}ー９）／（Ｘ＋８））

②　ｆ（ｘ）＝（ａｘ＋ｂ）／（ｘ^{2}－ｘ＋１）のときｆ（２）＝０、ｆ’（０）＝２を満たすａ，ｂを求めなさい。

③　ｆ（ｘ）＝ｓｑｒｔ（（５ｘ＋４）／（３ｘ＋１））のときｆ（ｆ（ｘ））のｘ＝０における微分係数の値を求めなさい。

答え　１／８ｓｑｒｔ（２）

④　ｌｎ（（ｓｑｒｔ（ｅ^{x}＋１）－１）／（ｓｑｒｔ（ｅ^{x}＋１）－１））

⑤　ｙ＝ｅ^{x}ｓｉｎ（ｘ）のｙ’、ｙ’’を求めなさい。

また、第ｎ階微分は、どのような式になりますか。（補注参照）

更にｙ$^{(16)}$／ｙを求めなさい。（答え　２５６）

⑥　ｆ（ｘ）＝ｓｉｎ（πｌｏｇ（ｘ，２））、０．１≦ｘ≦１０として

ｆ’（ｘ）＝０となるｘの個数を求めなさい。

答え　６個

また、その内、最小のものと最大のものの値を数値的に求めて下さい。

⑦　ｆ（ｘ）＝（－ａｘ^2＋ａ^2＋１）／（ｘ^2－４）、０＜ａとして
ｆ（ｘ）の極小値とそのときのａの値を求めて下さい。
答え　０＜ａ＜１のときｘ＝２／ａ、ｆ（ｘ）＝－ａ^2／４
　　　ａ＞１でｘ＝２ａでｆ（ｘ）＝－１／４

⑧　ｓｉｎｈ（ｘ）

⑨　ｃｏｓｈ（ｘ）

（３）次の関数のテーラー展開を求めなさい。
①　ｃｏｓ（ｘ）、ｘ＝０で５次まで。

②　ｔａｎ（ｘ）、ｘ＝０で５次まで。

③　ａｔａｎ（ｘ）、ｘ＝０で５次まで

④　（１＋ｘ^2）／（１＋ｘ＋ｘ^3）、ｘ＝１で５次まで
上式でｘ＝２の真の値とテーラー展開式での値とを比較してみて下さい。

（４）次の関数の不定積分に関する問題を解いて下さい。
①　ｓｉｎ^3（ｘ）

②　ｅ^{ax}ｓｉｎ（ｂｘ）

③　ｃｏｓｈ（ｘ）

④　１／ｓｉｎ（ｘ）

（５）次の関数の定積分に関する問題を解いて下さい。
①　｜ｓｉｎ（ｘ）－ｓｑｒｔ（３）ｃｏｓ（ｘ）｜、０～π
答え　４

②　ｘ^{2}ｌｎ（ｘ）で１～ｅ
答え　（２ｅ^3＋１）／９

③　ｅ$^{\sin(\pi x)}$の０～１は、ｅ$^{2/\pi}$より大きいことを示しなさい。（補注参照）

④　e^{-x*x} で０～inf

⑤　ｙ＝ｌｎ（１－x^2）、０～１／２でｓｑｒｔ（１＋y'^2）を求めなさい。
　これは、曲線の長さです。答えは、ｌｎ（３）－１／２

⑥　ｙ＝ｌｎ（ｃｏｓ（ｘ））、０～π／４の長さを求めなさい。
　答え　ｌｎ（ｓｑｒｔ（２）＋１）

（６）次の和又は積に関する問題を解いて下さい。

①　$x^2/(1+x^2)^n$ でｎ＝０～infの和を求めて下さい。
　ついでにその和（ｘの関数）のグラフを描いて下さい。
　答え　x^2+1

②　ｆ（ｘ）＝ｓｉｎ（ｘ）＋$\sin^2$（ｘ）＋・・でｘは－π／２～π／２として
　$\lim_{x\to 0} f(x)/x$
　答え　１

③　k^2の１からｎまでの積

Ⅷ　ベクトルと行列

本章では、ベクトルと行列（マトリックス）に関する基礎的な演算を学びます。

１．ベクトル

（１）ベクトルの入力

Ｄ−Ｒコマンドを用いてその次元を入力します。

要素は、順番に入力して最後にリターンで整理されます。

また、次のように［x_1，x_2，．．x_n］要素x_kを入力することもできます。

例としてＶを２次元のベクトル変数として定義した後、sin(x+1+2)リターン、cos(x)はリターンとして２次元ベクトルとして整理されます。

（２）ベクトルの要素の取り出し

ｅｌｅｍｅｎｔ（Ｖ，ｋ）は、ベクトルＶのｋ番目の要素を取り出す関数です。

例として、前述のＶのｅｌｅｍｅｎｔ（Ｖ，２）を簡単化して下さい。

（３）ベクトルの加算、減算

通常の演算と同様に次元の同一のベクトルＶ＋Ｗ、Ｖ−Ｗは、それぞれの要素の和又は差を要素とする新しいベクトルと定義されます。

例としてＶ＝［１，２］、Ｗ＝［１，−１］としたときＶ＋Ｗ、Ｖ−Ｗを求めて下さい。

（４）ベクトルの内積

ベクトルの内積は、次のように定義されます。

Ｖ．Ｗ＝対応する各要素の和（内積記号は、．ピリオドです。前後に半角のスペースを入れて下さい。）

従って、内積は、スカラー（通常の数）となります。

前述の例では、内積は、１ｘ１＋２ｘ（−１）＝−１となります。

確認しましょう。

また、２つのベクトルの間の角度をθとしたとき、内積は、｜Ｖ｜｜Ｗ｜ｃｏｓ（θ）とも表されます。θは０〜πとします。

ここで、｜Ｖ｜は、ベクトルの長さであり各要素の２乗和の平方根です。

例では、｜Ｖ｜＝ｓｑｒｔ（５）となります。

従って、ｃｏｓ（θ）＝−／ｓｑｒｔ（１０）となります。これから、角度を求めましょう。

これから$|W-V|^2=|W|^2+|V|^2-2|W||V|\cos(\theta)$が導かれます。

なお、｜Ｖ｜の計算は、ａｂｓ（Ｖ）で計算できます。

（５）ベクトルの外積

ベクトルの外積は、３次元ベクトルです。ｃｒｏｓｓ（Ｖ，Ｗ）は、次のように定義されます。ＶからＷへ反時計回りにネジを回した方向を持つ、長さが｜Ｖ｜｜Ｗ｜ｓｉｎ（θ）のベクトルです。

要素の関係では、［$V_2W_3-W_2V_3$，$V_3W_1-W_3V_1$，$V_1W_2-W_1V_2$］となります。

従って、２次元ベクトルの外積は、V_3，W_3をゼロとして考えると、
［０，０，$V_1W_2-W_1V_2$］という垂直方向のベクトルとなります。

例として、［１，２］と［１，－１］では、［０，０，－３］となります。

ＤＥＲＩＶＥで確認してみましょう。

２．行列（マトリックス）

（１）行列の入力

［［ａ，ｂ］，［ｃ，ｄ］］と入力すると、行列 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ を表します。

ベクトルの場合と同様にＤ－Ｍコマンドで次元を宣言して下さい。
次々と要素を入力します。

それでは、$\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{matrix}$ として（かっこは、省略して書いています）行列を入力して下さい。

３．行列演算

（１）行列の和と差

同一の行数、列数の行列Ａ，Ｂの和と差は、各要素の和又は差を持つ行列Ｃです。
Ｃ＝Ａ＋Ｂと書きます。

$A = \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{matrix}$ で $B = \begin{matrix} -1 & 2 \\ 5 & 6 \end{matrix}$ であれば、$C = \begin{matrix} 0 & 3 \\ 7 & 9 \end{matrix}$ となります。

上記のことをＤＥＲＩＶＥで確認してください。

（２）行列の要素の取り出し

ｅｌｅｍｅｎｔ（Ａ，ｊ，ｋ）でA_{jk}を取り出すことができます。
A_{jk}は、Ａのｊ行、ｋ列の要素を表します。

上記の例でｅｌｅｍｅｎｔ（Ａ，１，１）は、１となりますか。ＤＥＲＩＶＥで確認してみましょう。

（３）行列の積

ＡとＢの積は、かける順序によって異なります。ベクトルの外積の場合は、方向が逆になるだけで絶対値（長さ）は、等しかったのですが、仮に正方行列同士の積でも一般には、値が異なります。

そのＣ＝Ａ　．Ｂの要素は、$C_{ij}=\sum A_{ik}B_{kj}$ で和はｋが１～Ａの列数分までとります。従って、積が定義されるためには、Ａの列数とＢの行数が等しくなければならないわけです。積であるＣは、行数がＡの行数、列数がＢの列数という行列となります。

それでは、（１）のＡ，Ｂで試してみましょう。

$C=\begin{matrix} 4 & 8 \\ 13 & 22 \end{matrix}$ という行列になります。

もう一つの例をやってみましょう。

$A=\begin{matrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{matrix}$　$B=\begin{matrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{matrix}$ としたときＣ＝Ａ．Ｂは、どうなるでしょうか。

答えは、

$C=\begin{matrix} 2a+3c & 2b+3d & 5 \\ 4a+5c & 4b+5d & 9 \end{matrix}$ となります。

なお、Ａ．ＡをA^2と略記します。

（４）行列式

｜Ａ｜を正方行列（行数と列数の等しい行列）Ａの行列式といいます。

ＤＥＴ（Ａ）と入力をします。

行列の体積を表すものと考えて下さい。

$A=\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{matrix}$ の行列式を計算して下さい。答えは、１Ｘ３－１Ｘ２＝１となります。

従って、行列の要素がゼロでなくとも行列式がゼロとなる行列があることになります。

なお、｜ＡＢ｜＝｜Ａ｜｜Ｂ｜という性質があります。

（５）転置行列と対称行列

Ａ¥をＡの転置行列と呼びます。Ｂ＝Ａ¥とすると $B_{ij}=A_{ji}$ です。

Ａ＝Ａ¥である行列を特に対称行列と呼びます。

$A=\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{matrix}$ で確認してください。

（６）逆行列

Ａが正方行列である場合に｜Ａ｜≠０のときはＡ．Ｂ＝Ｅとなる行列Ｂがただ一つ存在してＡの逆行列と呼ばれます。ここで、Ｅは、対角要素が１でそれ以外の要素がゼロである単位行列を表します。

ＤＥＲＩＶＥでは、A^{-1}と入力します。

逆行列を使用すると連立一次方程式が理論的には簡明に表されます。

すなわち、連立方程式は、変数の個数と式の数が一致するときは、正方行列Ａを使用してＡ．Ｘ＝Ｙと表されます。Ａは係数行列、Ｘは変数ベクトル、Ｙは、定数ベクトルです。ここで、左からA^{-1}をかけるとＸ＝A^{-1}．Ｙと解けます。

２ｘ＋ｙ＝１

３ｘ－４ｙ＝２

は、行列とベクトルを使用すると、$\begin{matrix}2 & 1\\ 3 & -4\end{matrix}\quad\begin{matrix}x\\ y\end{matrix}\begin{matrix}=\\ \end{matrix}\begin{matrix}1\\ 2\end{matrix}$とかけます。

この解は、$A^{-1}=(1/11)\begin{matrix}4 & 1\\ 3 & -2\end{matrix}$から　$\begin{matrix}x=6/11\\ y=-1/11\end{matrix}$　と求まります。

このように逆行列を使用すると式が簡明になるばかりでなく、同一の係数行列の方程式を解く場合には、逆行列に定数ベクトルをかけるだけということになります。

ただし、次元の大きい連立方程式を逆ベクトルを使用して解くことは、実際的ではありません。

（７）行列のトレース

正方行列のトレースとは、対角要素の和のことをいいます。

ＤＥＲＩＶＥでは、ｔｒａｃｅ（Ａ）と入力します。

（８）ベクトルと行列を変数で表す場合の注意

Ｖ：＝［１，２］とおいて下さい。

Ａ：＝$\begin{matrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{matrix}$　同様に行列の場合もこのように：＝を使用して下さい。

４．固有値と固有ベクトル

正方行列Ａの固有ベクトル及び固有値とは、次の式を満足するベクトルＶと定数ａのことです。

Ａ．Ｖ＝ａＶ

通常、次元の数だけ固有値と固有ベクトルの組があることになります。

低次元の行列の固有値は、固有方程式ｄｅｔ（Ａ－Ｅ）＝０を解くことにより求まります。これはせいぜい４次元程度まで。この方程式を特性方程式といいます。

ｃｈａｒｐｏｌｙ（Ａ，ａ）で得られます。

また、ｅｉｇｅｎｖａｌｕｅｓ（Ａ，ａ）は、Ａの固有値を変数ａについて解きます。

次に固有ベクトルとですがこれは、標準のＤＥＲＩＶＥにvector.mthというファイルをＴ－Ｌ－Ｕコマンドによって読み込む必要があります。

それでは、読み込んでみましょう。画面には表示されません。

固有値が厳密解の場合は、ｅｘａｃｔ＿ｅｉｇｅｎｖｅｃｔｏｒ（Ａ，ａ）は、固有値ａに対応する固有ベクトルを与えます。

厳密解でない場合は、ａｐｐｒｏｘ＿ｅｉｇｅｎｖｅｃｔｏｒ（Ａ，ａ）を使用して下さい。特に次元が３以上の場合は、後者が適当です。

そこで例題としてＡ＝１　２の固有値と固有ベクトルを求めて下さい。
　　　　　　　　　　２　３

答え　固有値は、２－ｓｑｒｔ（５）、２＋ｓｑｒｔ（５）で固有ベクトルは、

それぞれ、[1,(1-sqrt(5))/2]、[1,(1+sqrt(5))/2]となります。

固有ベクトルの著しい特徴は、直交することです。内積を作成してみれば、

ゼロとなることで分かります。

なお、固有ベクトルは、定数をかけても長さのみしか変わらないため定数分の違いがあります。

練習問題Ⅷ

次の問題を解きましょう。

①　Ａ＝ｓｉｎ（ｘ）　ｃｏｓ（ｘ）として　ここで、０≦ｘ≦π
　　－ｃｏｓ（ｘ）　ｓｉｎ（ｘ）

｜Ａ｜を計算してみましょう。

②　ベクトルＶ＝［１，１］に左から①のＡをかけて得られたＷについて
［０，１］との角度を計算してみましょう。

Ｖを角度ｘでけ回転したベクトルとなっているはずです。

従って、ｘ軸との角度は、π／４＋ｘとなるはずです。

③　Ａの逆行列を求めましょう。

次にＷに$Ａ^{-1}$をかけてみましょう。［１，１］に戻るはずです。

④　Ａ＝１　１　１としてＡの固有値と固有ベクトルを計算して下さい。
　　　１　２　２
　　　１　２　３

答え　x=0.307978に対して[-0.591009,0.736976,-0.327984]

x=0.643104　[-0.736975,-0.327985,0.591009]

x=5.04891　[-0.327979,-0.591012,-0.736975]

⑤　再帰関数の例でフィボナッチ数列を取り上げましたが、ここでは、ｉｔｅｒａｔｅ関数とベクトルを用いて計算させましょう。

W(n):=iterate（［element(V,2), element(V,2)+element(V,1)］,V,[1,2],n)

これは、初期ベクトル［１，２］を出発点として第１項のベクトルを計算してＶに代入してという操作をｎ回繰り返します。

ｎ次のフィボナッチ数は、element(W(ｎ),1)となります。

計算させてみましょう。

定価　１，０００円（税込み）

補注

練習問題Ⅶ

（２）⑤

ＳＩＮ（Ｘ）＝（e^{xi}－e^{-xi}）／（２ｉ）を利用すると求まります。

ただし、ＤＥＲＩＶＥでは、第ｎ階微分が求まりませんので、

（１＋ｉ）^{n}　及び　（１－ｉ）^{n}　を求めて各項にかけて引き算をすれば、次のように

e^{x}（ｓｑｒｔ（２））^{n}ｓｉｎ（ｘ＋πｎ／４）と答えが求まります。

（５）③

ｓｉｎ（πｘ）をｘ＝１／２でｔａｙｌｏｒ展開して２次までとります。

するとｓｉｎ（πｘ）＝１－π^{2}（２ｘ－１）^{2}／８＋．．．

０≦ｘ≦１／２では、ｓｉｎ（πｘ）≧１－π^{2}（２ｘ－１）^{2}／８ であることは、

微分を使用すると証明できます。

ｅｘｐ（ｓｉｎ（πｘ））は、ｘ＝１／２に対して対称であるので問題の積分をＪとするとＪ≧２＊定積分（０～１／２のｅｘｐ（１－π^{2}（２ｘ－１）^{2}／８））

右辺は、誤差関数を含んだ形で次のように表されます。

ｅ＊ｓｑｒｔ（２／π）ＥＲＦ（πｓｑｒｔ（２）／４）

これは、概数として１．９１６７８を与えます。真の値は、１．９７６３０・・ですからかなり良い近似になっていることが分かります。題意のｅｘｐ（２／π）＝１．８９００８・・ですから。

なお、ＥＲＦ（ｘ）＝２／ｓｑｒｔ（π）＊定積分０～Ｘまでの（e^{-t*t}）